

Интерполирование сплайнами

Интерполяционные формулы Лагранжа, Ньютона и Стирлинга и др. при использовании большого числа узлов интерполяции на всем отрезке $[a, b]$ часто приводят к плохому приближению из-за накопления погрешностей в процессе вычислений [2]. Кроме того, из-за расходимости процесса интерполяции увеличение числа узлов не обязательно приводит к повышению точности. Для снижения погрешностей весь отрезок $[a, b]$ разбивается на частичные отрезки и на каждом из них функцию $f(x)$ заменяют приближенно полиномом невысокой степени. Это называется *кусочно-полиномиальной интерполяцией*.

Один из способов интерполирования на всем отрезке $[a, b]$ является *интерполирование сплайнами*.

Сплайном называется кусочно-полиномиальная функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и имеющая на этом отрезке некоторое количество непрерывных производных. Преимущества интерполяции сплайнами по сравнению с обычными методами интерполяции – в сходимости и устойчивости вычислительного процесса.

Рассмотрим один из наиболее распространенных в практике случаев – интерполирование функции *кубическим сплайном*. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция. Введем разбиение отрезка:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (6)$$

и обозначим $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Сплайном, соответствующим данной функции и узлам интерполяции (6) называется функция $s(x)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ функция является кубическим многочленом;

2) функция , а также ее первая и вторая производные непрерывны на отрезке $[a, b]$;

$$3) s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Третье условие называется *условием интерполирования*. Сплайн, определяемый условиями 1) – 3), называется *интерполяционным кубическим сплайном*.

Рассмотрим способ построения кубического сплайна [2].

На каждом из отрезков , будем искать сплайн-функцию $s(x) = s_i(x)$ в виде полинома третьей степени:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – искомые коэффициенты.

Продифференцируем (7) трижды по x :

$$s'_i(x) = b_i + c_i(x - x_i) + \frac{d_i}{2}(x - x_i)^2, \\ s''_i(x) = c_i + d_i(x - x_i), \\ s'''_i(x) = d_i,$$

откуда следует

$$a_i = s_i(x_i), b_i = s'_i(x_i), c_i = s''_i(x_i), d_i = s'''_i(x_i).$$

Из условия интерполирования 3) получаем:

$$a_i = f(x_i), i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Кроме того, будем считать $a_0 = f(x_0)$.

Из условий непрерывности функции вытекает:

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Отсюда с учетом (7) получим:

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Обозначив $h_i = x_i - x_{i-1}$ и опуская промежуточные выкладки [2], окончательно получим систему уравнений для определения коэффициентов c_i :

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$c_0 = c_n = 0.$$

(9)

В силу трехдиагональности матрицы коэффициентов система (9) имеет единственное решение [2]. Найдя коэффициенты c_i , остальные коэффициенты определим по явным формулам:

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Таким образом, существует и найден единственный кубический сплайн, удовлетворяющий условиям 1) – 3).

Сплайн-интерполяция.

Определение 3.2 Сплайн (англ. spline - рейка, линейка) - это определенная в некоторой области $G \in R^n$ кусочно-полиномиальная функция из класса $C^r(G)$.

Таким образом в соответствии с определением существует разбиение области G на подобласти такое, что внутри каждой подобласти сплайн представляет собой полином некоторой степени M .

Определение 3.3 Интерполяция при помощи сплайнов называется *сплайн-интерполяцией*.

Рассмотрим одномерный случай ($n=1$) и наиболее употребительную кубическую сплайн-интерполяцию ($M=3$) из класса C^2 ($r=2$).

Математическая постановка.

Пусть известные значения некоторой функции $f(x)$ образуют таблицу 3.2 на отрезке $[a, b]$, где $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_N \equiv b$

x	x_0	x_1	$\dots$	x_N
f	f_0	f_1	$\dots$	f_N

Таблица 3.2: Табличная функция.

Требуется построить по данной таблице интерполяционный кубический сплайн из класса C^2 , то есть функцию $g(x)$ со следующими свойствами:

1) $g(x) \in C^2[a, b]$

2) на любом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$ функция $g(x)$ является полиномом третьей степени,

3) $g(x_i) = f_i$, $i = 0, \dots, N$. Для однозначного решения этой задачи добавим следующее часто используемое условие:

4) $g''(a) = g''(b) = 0$

ТЕОРЕМА 3.3 Функция, удовлетворяющая свойствам 1)-4), существует и единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Так как по свойству 1) функция $g''(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и по свойству 2) линейна на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$ то можно записать $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$ следующее представление:

$g''(x) = m_{i-1}(x_i - x)/h_i + m_i(x - x_{i-1})/h_i$	(3.7)
--	-------

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = g''(x_i)$. Проинтегрируем равенство (3.7) дважды.

Получим:

$g(x) = m_{i-1}(x_i - x)^3/6h_i + m_i(x - x_{i-1})^3/6h_i + A_i(x_i - x)/h_i + B_i(x - x_{i-1})/h_i$	(3.8)
--	-------

где A_i, B_i - некоторые константы интегрирования. Найдем A_i и B_i , подставляя значения x_i и x_{i-1} в (3.8):

$$f_i = g(x_i) = m_i h_i^2/6 + B_i, \text{ следовательно, } B_i = f_i - m_i h_i^2/6$$

$$f_{i-1} = g(x_{i-1}) = m_{i-1} h_i^2/6 + A_i, \text{ следовательно } A_i = f_{i-1} - m_{i-1} h_i^2/6$$

Подставляя A_i и B_i в (3.8) получим равенство:

$g(x) = m_{i-1}(x_i - x)^3/6h_i + m_i(x - x_{i-1})^3/6h_i + (f_{i-1} - m_{i-1} h_i^2/6)(x_i - x)/h_i + (f_i - m_i h_i^2/6)(x - x_{i-1})/h_i$	(3.9)
--	-------

Тогда производная функции $g(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$ имеет вид:

$g'(x) = -m_{i-1}(x_i - x)^2/2h_i + m_i(x - x_{i-1})^2/2h_i + m_{i-1} h_i/6 - m_i h_i/6 + (f_i - f_{i-1})/h_i$	(3.10)
--	--------

Пользуясь формулой (3.10) найдем односторонние (слева и справа) пределы функции $g'(x)$ в точках $x_i, i = 1, \dots, N$:

$$g'(x_i - 0) = m_{i-1} h_i/6 + m_i h_i/3 + (f_i - f_{i-1})/h_i; g'(x_i + 0) = -m_i h_{i+1}/3 - m_{i+1} h_{i+1}/6 + (f_{i+1} - f_i)/h_{i+1}$$

(последнее равенство получено из (3.10) заменой индекса i на $i+1$, то есть переходом на отрезок $[x_i, x_{i+1}]$). Так как по свойству 1) функция $g'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то приравнявая $g'(x_i+0)$ и $g'(x_i-0), i = 1, \dots, N-1$ получаем $N-1$ уравнение:

$m_{i-1} h_i/6 + m_i (h_i + h_{i+1})/3 + m_{i+1} h_{i+1}/6 = (f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i, i = 1, \dots, N-1$	(3.11)
--	--------

Учитывая, что по свойству 4) имеют место равенства

$g''(x_0) \equiv m_0 = 0, g''(x_N) \equiv m_N = 0$	(3.12)
--	--------

получаем линейную алгебраическую систему для нахождения неизвестных $m_1, \dots, m_{N-1}$:

$A\bar{m} = b$	(3.13)
----------------	--------

где

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h_{N-2} + h_{N-1}}{3} & \frac{h_{N-1}}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h_{N-1}}{6} & \frac{h_{N-1} + h_N}{3} \end{bmatrix}$$

$$\bar{m} = (m_1, m_2, \dots, m_{N-1})^T,$$

$$b = \left(\frac{f_2 - f_1}{h_2} - \frac{f_1 - f_0}{h_1}, \dots, \frac{f_N - f_{N-1}}{h_N} - \frac{f_{N-1} - f_{N-2}}{h_{N-1}} \right)^T.$$

Очевидно, что матрица A имеет строгое диагональное преобладание. Но из курса алгебры известно, что такие матрицы невырождены.

Следовательно, система однозначно разрешима относительно вектора $\bar{m}$, а тем самым функция со свойствами 1)-4) существует, единственна и представляется формулой (3.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7 На практике сплайн вычисляется на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, N$ по формуле (3.9), с использованием табличной функции 3.2, равенств (3.12) и вектора $\bar{m} = (m_1, \dots, m_{N-1})^T$, являющегося решением системы (3.13).

Оценку погрешности при сплайн-интерполяции дает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3 [3, стр.148] Если интерполируемая функция $f(x) \in C^4[a, b]$, то для функции погрешности $R(x) = f(x) - g(x)$ справедливо неравенство:

$\max_{x \in [a,b]} R(x) \leq \frac{1}{8} M_4 h^4$	(3.14)
--	--------

где $M_4 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$; $h = \max_{1 \leq i \leq N} h_i$.

Меньше ограничений на функцию $f(x)$ накладывает

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4 [11, _____ стр.98] Если интерполируемая функция $f(x) \in C^3[a,b]$ и разбиение отрезка $[a,b]$ узлами интерполяции является равномерным ($h=h_i=const$), то для функции погрешности $R(x)=f(x)-g(x)$ справедливо неравенство:

$\max_{x \in [a,b]} R(x) \leq \frac{5}{2} M_3 h^3,$	(3.15)
---	--------

где $M_3 = \max_{x \in [a,b]} |f^{(3)}(x)|$.

8.Определение

Кривая Безье — параметрическая кривая, задаваемая выражением

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i \mathbf{b}_{i,n}(t), \quad 0 < t < 1$$

где $\mathbf{P}_i$ — функция компонент векторов опорных вершин, а $\mathbf{b}_{i,n}(t)$ — базисные функции кривой Безье, называемые также полиномами Бернштейна.

$$\mathbf{b}_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

где $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ — число сочетаний из n по i , где — степень полинома, — порядковый номер опорной вершины.

[править]Виды кривых Безье

[править]Линейные кривые

При $n = 1$ кривая представляет собой отрезок прямой линии, опорные точки P_0 и P_1 определяют его начало и конец. Кривая задаётся уравнением:

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \quad t \in [0, 1].$$

[править]Квадратичные кривые

Квадратичная кривая Безье ($n = 2$) задаётся 3-мя опорными точками: P_0 , P_1 и P_2 .

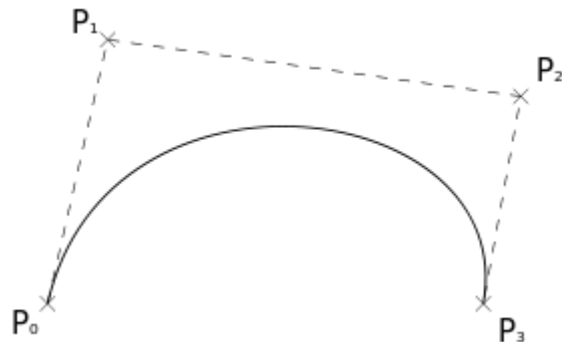
$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^2\mathbf{P}_0 + 2t(1 - t)\mathbf{P}_1 + t^2\mathbf{P}_2, \quad t \in [0, 1].$$

Квадратичные кривые Безье в составе сплайнов используются для описания формы символов в шрифтах TrueType и в SWF файлах.

[править]Кубические кривые

В параметрической форме кубическая кривая Безье ($n = 3$) описывается следующим уравнением:

$$\mathbf{B}(t) = (1 - t)^3\mathbf{P}_0 + 3t(1 - t)^2\mathbf{P}_1 + 3t^2(1 - t)\mathbf{P}_2 + t^3\mathbf{P}_3, \quad t \in [0, 1].$$



Кубическая кривая Безье

Четыре опорные точки P_0 , P_1 , P_2 и P_3 , заданные в 2-х или 3-мерном пространстве определяют форму кривой.

Линия берёт начало из точки P_0 направляясь к P_1 и заканчивается в точке P_3 подходя к ней со стороны P_2 . То есть кривая не проходит через

точки P_1 и P_2 , они используются для указания её направления. Длина отрезка между P_0 и P_1 определяет, как скоро кривая повернёт к P_3 .

В матричной форме кубическая кривая Безье записывается следующим образом:

$$\mathbf{B}(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \mathbf{M}_B \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{M}_B$ называется базисной матрицей Безье:

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$